Eventos en un Proceso Estocástico

Si A es un conjunto de estados, el evento $X_n \in A$ corresponde a la situación en donde al tiempo n el proceso toma algún valor dentro del conjunto A.

En particular, $X_n = x$ es el evento en donde al tiempo n el proceso se encuentra en el estado x. Considerando distintos tiempos, estaremos interesados en eventos de la forma:

$$(X_{n_1} = x_1, X_{n_2} = x_2, \dots, X_{n_k} = x_k)$$

Los diferentes tipos de procesos estocásticos se obtienen al considerar las distintas posibilidades para el espacio paramétrico, el espacio de estados, las características de las trayectorias y principalmente las relaciones de dependencia entre las variables aleatorias que conforman el proceso.

Enseguida se presentan algunos ejemplos generales de procesos estocásticos.

PROCESO DE ENSAYOS INDEPENDIENTES

El proceso a tiempo discreto $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$, puede estar constituido por variables aleatorias independientes. Este modelo representa una sucesión de ensayos independientes de un mismo experimento aleatorio, por ejemplo, lanzar un dado o moneda repetidas veces. El resultado u observación del proceso en un momento cualquiera es, por lo tanto, independiente de otra observación pasada o futura del proceso.

Procesos de Markov

Estos tipos de procesos son modelos en donde, suponiendo conocido el estado presente del sistema, los estados anteriores no tienen influencia en los estados futuros del sistema. Esta condición se llama propiedad de Markov y se puede expresar de la siguiente forma:

Para cualesquiera estados $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ (pasado), x_n (presente), x_{n+1} (futuro), se cumple la igualdad

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_n \; | X_n = x_n)$$

De esta forma la probabilidad del evento futuro

$$(X_{n+1} = x_{n+1}),$$

sólo depende del evento $(X_n = x_n)$, mientras que la información correspondiente del evento pasado

$$(X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}),$$

es irrelevante.

Eventos en un Proceso Estocástico

Procesos con incrementos independientes

Se dice que un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X_t: t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes si para cualquiera tiempo $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, las variables

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

Son independientes. Esto quiere decir que los desplazamientos que tiene el proceso en estos intervalos disjuntos de tiempo son independientes unos de otros.

Procesos estacionarios

Se dice que un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X_t: t \geq 0\}$ es estacionario en el sentido estricto si para cualesquiera tiempos $t_1, t_2, \dots, t_n$, la distribución del vector $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ es la misma que la del vector $\left(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_{n+h}}\right)$ para cualquier valor de $h > 0$. En particular, la distribución de X_t es la misma que la del X_{t+h} para cualquier $h > 0$.

Procesos con incrementos estacionarios

Se dice que un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X_t: t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios si para cualquiera tiempo $s < t$, y para cualquier $h > 0$, las variables,

$$X_{t+h} - X_{s+h} \ y \ X_t - X_s$$

tienen la misma distribución de probabilidad. Es decir, el incremento que tiene el proceso entre los tiempos s y t sólo depende de estos tiempos a través de la diferencia $t - s$, y no de los valores específicos de s y t.