Problemas: Cadenas de Markov y Probabilidades de Transiciones

Línea telefónica

Consideremos una línea telefónica que puede tener dos estados, libre ($\mathbf{0}$) u ocupada ($\mathbf{1}$), y para simplificar vamos a considerar su comportamiento en los intervalos de tiempo de la forma $[\boldsymbol{n};\ \boldsymbol{n}+\mathbf{1})$. Para cualquiera de estos periodos la probabilidad de que llegue una llamada es $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0};\ \mathbf{1}]$. Si una nueva llamada llega cuando la línea está ocupada, ésta no se registra, mientras que, si la línea está libre, se toma la llamada y la línea pasa a estar ocupada.

La probabilidad de que la línea se desocupe es $\boldsymbol{\beta} \in [\mathbf{0};\ \mathbf{1}]$. En cada intervalo de tiempo puede llegar una llamada o se puede desocupar la línea, pero no ambas cosas. Esta situación se puede modelar por una cadena de Markov con espacio de estados $\boldsymbol{E} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Las probabilidades de transición están dadas por,

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_{n+1} = \mathbf{0}\ |\boldsymbol{X}_n = \mathbf{0}) = \mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{P}_{00}$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_{n+1} = \mathbf{1}\ |\boldsymbol{X}_n = \mathbf{0}) = \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{P}_{01}$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_{n+1} = \mathbf{1}\ |\boldsymbol{X}_n = \mathbf{1}) = \mathbf{1} - \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{P}_{11}$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_{n+1} = \mathbf{0}\ |\boldsymbol{X}_n = \mathbf{1}) = \mathbf{1} - \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{P}_{10}$$

Por lo tanto, la matriz de transición es:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} & \mathbf{1} - \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$$

Un caso un poco más complicado es el siguiente. Supongamos ahora que, si la línea está ocupada y llega una llamada, ésta se guarda y permanece en espera hasta que la línea se desocupa. Pero si hay una llamada en espera no se registran las siguientes llamadas. En cada periodo entra a lo sumo una llamada a la cola. Cuando en un periodo se desocupa la línea, se identifica el fin del periodo con el momento de colgar, de modo tal que después de haber colgado ya no se registran más llamadas en ese periodo.

Como en el ejemplo anterior $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0};\ \mathbf{1}]$denota la probabilidad de que llegue una llamada y $\boldsymbol{\beta} \in [\mathbf{0};\ \mathbf{1}]$ la probabilidad de que la línea se desocupe. Suponemos además que en un mismo período no puede ocurrir que el teléfono esté ocupado con llamada en espera, cuelgue, entre la llamada que estaba en espera y entre otra llamada en espera.

Para este caso consideramos un espacio de estados con tres elementos: 0 denota que la línea está libre, 1 cuando la línea está ocupada y no hay llamada en espera y 2 cuando la línea está libre y hay una llamada en espera.

Para simplificar las expresiones vamos a usar la notación $\boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}' = \mathbf{1} - \boldsymbol{\beta}$. Las probabilidades de transición son

$$\boldsymbol{P(X_{n+1} = 0\ |X_n = 0) = \alpha'}$$

$$\boldsymbol{P(X_{n+1} = 0\ |X_n = 1) = \alpha'\beta}$$

$$\boldsymbol{P(X_{n+1} = 0\ |X_n = 2) = 0}$$

$$\boldsymbol{P(X_{n+1} = 1\ |X_n = 0) = \alpha}$$

$$\boldsymbol{P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = \alpha'\beta' + \alpha\beta}$$

$$\boldsymbol{P(X_{n+1} = 1\ |X_n = 2) = 0}$$

$$\boldsymbol{P(X_{n+1} = 2\ |X_n = 0) = 0}$$

$$\boldsymbol{P(X_{n+1} = 2|X_n = 1) = \alpha\beta'}$$

$$\boldsymbol{P(X_{n+1} = 2\ |X_n = 2) = \beta'}$$

Modelo de inventario

Una tienda de aparatos electrónicos vende un sistema de juegos de video y opera bajo el siguiente esquema:

Si al final del día el número de unidades disponibles es $\mathbf{1}$ ó $\mathbf{0}$, se ordenan nuevas unidades para llevar el total a 5. Para simplificar supondremos que la nueva mercancía llega antes de que la tienda abra al día siguiente. Sea $\boldsymbol{X_n}$ el número de unidades disponibles al final del $\boldsymbol{n}$-ésimo día y supongamos que el número de clientes que quieren comprar un juego es $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}$ o $\mathbf{3}$ con probabilidades $\mathbf{0.3}, \mathbf{0.4}, \mathbf{0.2}$ y $\mathbf{0.1}$, respectivamente. Tenemos entonces la siguiente matriz de transición:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Esta cadena es un ejemplo de una política de control de inventarios $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{S})$ con $\boldsymbol{s} = \mathbf{1}$ y $\boldsymbol{S} = \mathbf{5}$: cuando el stock disponible cae por debajo de s, se ordena suficiente mercancía para llevar el stock a $\boldsymbol{S} = \mathbf{5}$. Sea $\boldsymbol{D_n}$ la demanda en el $\boldsymbol{n}$-ésimo día. Tenemos

$$\boldsymbol{X_{n+1}} = \begin{cases} (X_n - D_{n+1})^+ & si\ X_n > s, \\ (S - D_{n+1})^+ & si\ X_n \leq s. \end{cases}$$

La descripción general de este esquema de inventario es la siguiente: se tiene un inventario de cierto producto con el fin de satisfacer la demanda. Suponemos que el inventario se repone al final de periodos que etiquetamos $\boldsymbol{n} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$ y suponemos que la demanda total durante un periodo n es una v.a. $\boldsymbol{X_n}$ cuya distribución es independiente del periodo (es decir, es estacionaria):

$$P(D_n = k) = p_k, k = 0, 1, 2, \dots$$

Donde $p_k \geq 0, \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

El nivel del inventario se verifica al final de cada periodo y la política $(s; S)$ de reposición $(s < S)$ estipula que si el nivel de inventario no está por encima de s, se ordena una cantidad suficiente para llevar el inventario a S. Si, en cambio, el inventario disponible es mayor que s, no se produce una orden.

Llamemos X_n al inventario disponible al final del n-ésimo periodo.

Hay dos situaciones posibles cuando la demanda excede al inventario:

a. La demanda no satisfecha se pierde.
   En este caso el nivel del inventario nunca puede ser negativo y vale la relación

$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n - D_{n+1})^+ & si\ X_n > s, \\ (S - D_{n+1})^+ & si\ X_n \leq s. \end{cases}$$

b. La demanda no satisfecha en un periodo se satisface inmediatamente después de renovar el inventario.
   En este casi el nivel de inventario puede ser negativo y satisface

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - D_{n+1} & si\ X_n > s, \\ S - D_{n+1} & si\ X_n \leq s. \end{cases}$$

La sucesión (X_n) es una cadena de Markov con probabilidades de transición

$$P_{ij}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} P(D_{n+1} = i - j) & si\ s < i < S, \\ P(D_{n+1} = S - j) & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Paseo al azar

Consideremos una sucesión de juegos de azar en los que en cada juego ganamos $1 con probabilidad $p = 0.4$ y perdemos $1 con probabilidad $1 - p = 0.6$. Supongamos que decidimos dejar de jugar si nuestro capital llega a N o si nos arruinamos.

El capital inicial es de X_0 y X_n es nuestro capital al cabo de n juegos. Sea ε_i el resultado del i-ésimo juego:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} +1 & con\ probabilidad\ p, \\ -1 & con\ probabilidad\ q, \end{cases}$$

Entonces

$$X_n = X_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$$

Luego las probabilidades son:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1)$$
$$= P(X_n + \varepsilon_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots., X_1 = i_1)$$
$$= P(X_n + \varepsilon_{n+1} = j | X_n = i) = P(\varepsilon_{n+1} = j - i | X_n = i)$$
$$= P(\varepsilon_{n+1} = j - i) = \begin{cases} 0.4 & si\ j = i + 1, \\ 0.6 & si\ j = i - 1, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

La matriz de transición en este caso es:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$