Para entender el concepto de progresión es necesario saber, primero, el significado de sucesión de números: una sucesión de números es un arreglo ordenado de números de acuerdo a cierto patrón o ley. Si dentro de la sucesión se pude tener un último término, se dice que la sucesión es finita; en caso contrario, si una sucesión tiene un número incontable de términos, entonces, la sucesión es infinita.

Ahora bien, una progresión aritmética es una sucesión de números, donde cada uno de los términos se obtiene sumando un término fijo o constante al anterior, para obtener el término siguiente; a éste término fijo o constante se le llama diferencia de la progresión, denotada por d.

En general, se tiene una sucesión ordenada de números en la cual se le va a ir sumando cierta cantidad "d", para obtener el siguiente término; sea la sucesión:

$$x_1;\ x_1 + d;\ x_1 + 2d;\ x_1 + 3d;\ x_1 + 4d;\ \ldots$$

En donde observamos que el primer término es x_1 y d es la diferencia de la sucesión.

El segundo término es $x_1 + d$

El tercer término es $x_1 + 2d$

El cuarto término es $x_1 + 3d$

Observando el patrón de los datos, se tiene que el término general o término enésimo es: $x_n = x_1 + (n-1)d$.

Ahora, si queremos encontrar la suma de los primeros n elementos, será mediante la fórmula $s_n = \frac{n}{2}(x_1 + x_n)$

A continuación se presenta un ejemplo para encontrar cualquier elemento en una progresión aritmética así como la suma de los primeros n elementos. Considere la progresión aritmética: $1, 3, 5, 7, 9$, el elemento que está en la posición 10 será:

$$x_{10} = x_1 + (n-1)d = 1 + (10-1)2 = 1 + 18 = 19$$

Entonces, se tiene la progresión escrita de esta forma hasta la décima posición:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.$$

Si se quiere calcular la suma de las 10 primeras posiciones, se obtiene mediante la fórmula:

$$s_n = \frac{n}{2}(x_1 + x_n)$$
$$s_{10} = \frac{10}{2}(1 + 19)$$
$$s_{10} = 5(20) = 100$$

A manera de comprobación, se puede calcular toda la suma (aunque no es necesario, pues la fórmula nos ayuda a simplificar los cálculos):

$$1+3\ +5+\ 7+\ 9+\ 11+13+\ 15+\ 17+\ 19=100$$

Consideremos otra progresión aritmética; sea la secuencia $10, 8, 6, 4, \ldots$ hasta 12 términos. Para encontrar los términos restantes de la progresión hasta llegar al término número 12, se hace uso de la fórmula $x_n\ =\ x_1\ +(n-1)d$, considerando que en este caso $n\ =\ 12$, $d\ =\ -2$, $x_1=10$, entonces:

$$x_5=\ x_1+(5-1)(-2)=10+(4)(-2)=10-8=2$$

$$x_6=\ x_1+(6-1)(-2)=10+(5)(-2)=10-10=0$$

$$x_7=\ x_1+(7-1)(-2)=10+(6)(-2)=10-12=-2$$

$$x_8=\ x_1+(8-1)(-2)=10+(7)(-2)=10-14=-4$$

$$x_9=\ x_1+(9-1)(-2)=10+(8)(-2)=10-16=-6$$

$$x_{10}=\ x_1+(10-1)(-2)=10+(9)(-2)=10-18=-8$$

$$x_{11}=\ x_1+(11-1)(-2)=10+(10)(-2)=10-20=-10$$

$$x_{12}=\ x_1+(12-1)(-2)=10+(11)(-2)=10-22=-12$$

Se tiene la secuencia con doce términos:

$$10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, -10, -12.$$

Para obtener la suma de los doce términos, se emplea la fórmula:

$$s_n = \frac{n}{2}(x_1 + x_n)$$

$$s_{12} = \frac{12}{2}(10 + (-12))$$

$$s_{12} = 6(-2) = -12$$

La aplicación de las progresiones aritméticas es variada, debido a que con facilidad se pueden encontrar solamente los términos los cuales nos interesen de una sucesión de números, sin necesidad de encontrar todo el desarrollo.

Referencia:

(Rivera Rosales, 2013) Progresiones aritméticas y sus aplicaciones, Universidad Autónoma de Coahuila, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.