Progresiones Geométricas y sus Aplicaciones

El tema de las progresiones geométricas no es del todo ajeno a las progresiones aritméticas, pues guardan cierta analogía en donde ambas son sucesiones de números, tal que, de un término a otro, hay un incremento el cual se obtiene a través de una regla o razón.

Una progresión geométrica es una sucesión de números, tal que cualquier término en la sucesión se obtiene multiplicando el término anterior por una constante (no nula), la cual se llama razón de progresión.

Entonces, una progresión geométrica puede escribirse como:

$$x_1, x_1 r, x_1 r^2, x_1 r^3, \cdots$$

Donde x_1 es el primer término de la sucesión y r es la razón de progresión (o simplemente razón). Observemos el comportamiento de los términos de la sucesión. Se tiene que $x_2 = x_1 r$; $x_3 = x_1 r^2$; $x_4 = x_1 r^3$, siguiendo este patrón, el término enésimo es:

$$x_n = x_1 r^{n-1}.$$

Ahora bien, si queremos obtener la suma de los primeros n términos de la sucesión, es decir,

$$x_1 + x_1 r + x_1 r^2 + x_1 r^3 + \cdots + x_1 r^{n-1}$$

La fórmula es: $s_n = \frac{x_1 (1-r^n)}{1-r}$, con $r \neq 1$. Una relación equivalente que se obtiene para la suma de los primeros n términos es $s_n = \frac{x_1 - r x_n}{1-r}$ con $r \neq 1$.

Veamos un par de ejemplos:

Ejemplo 1.

Considere la sucesión de números $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$, encuentre 3 términos más y la suma de los ocho términos de la sucesión.

En este caso se tiene $r = 2$, entonces la sucesión queda expresada de la forma:

$$3, 6, 12, 24, 48 = 3, 3(2), 3(2)^2, 3(2)^3, 3(2)^4$$

Para obtener el sexto término, se tiene $x_n = x_1 r^{n-1}$

$$x_6 = (3)(2)^{6-1} = (3)(2)^5 = 96$$

El séptimo término

$$x_7 = (3)(2)^{7-1} = (3)(2)^6 = 192$$

El octavo término

$$x_8 = (3)(2)^{8-1} = (3)(2)^7 = 384$$

La suma de los ocho términos de la sucesión es: $s_n = \frac{x_1\,(1-r^n)}{1-r}$,

$$s_8 = \frac{3\,(1-2^8)}{1-2} = \frac{(3)(-255)}{-1} = \frac{-765}{-1} = 765$$

O bien con la fórmula alterna:

$$s_n = \frac{x_1 - r x_n}{1 - r}$$

$$s_8 = \frac{3 - (2)(384)}{1 - 2} = \frac{3 - 768}{-1} = \frac{-765}{-1} = 765$$

Lo cual verifica la fórmula anterior, entonces:

$$3 + 6 + \ 12 + 24 + \ 48 + 96 + 192 + 384 = 765$$

Ejemplo 2.

Ahora consideremos la siguiente progresión geométrica:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

Obtenga tres términos más y, además, calcule la suma de todos los términos de la sucesión.

En este caso, se tiene $r = \frac{1}{2}$, entonces la sucesión queda expresada de la forma:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots = \ 1, 1\left(\frac{1}{2}\right), 1\left(\frac{1}{2}\right)^2, 1\left(\frac{1}{2}\right)^3, \ldots$$

Para obtener el quinto término, se tiene $x_n = \ x_1 r^{n-1}$

$$x_5 = (1)\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = (1)\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

El sexto término

$$x_6 = (1)\left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = (1)\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{1}{32}$$

El séptimo término

$$x_7 = (1)\left(\frac{1}{2}\right)^{7-1} = (1)\left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \frac{1}{64}$$

La suma de los siete términos de la sucesión es: $s_n = \frac{x_1\,(1-r^n)}{1-r}$,

$$s_7 = \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{(1)\left(\frac{127}{128}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{127}{128}}{\frac{1}{2}} = \frac{127}{64}$$

O bien con la fórmula alterna:

$$s_n = \frac{x_1 - r x_n}{1-r}$$

$$s_7 = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{64}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{128}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{127}{128}}{\frac{1}{2}} = \frac{127}{64}$$

Lo cual verifica la fórmula anterior, entonces:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{127}{64}$$

Referencia:
(Rivera Rosales, 2013) Progresiones geométricas y sus aplicaciones, Universidad Autónoma de Coahuila, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.