

Sistemas de Educaciones Lineales

Teoría básica para modelar sistemas de ecuaciones lineales a partir de problemas de administración

1- Programación Lineal: es una técnica cuantitativa ampliamente aplicada en sistemas que presenten relaciones lineales, para utilizar los recursos escasos de la mejor manera posible.

2- La mejor manera de usar los recursos escasos se logra utilizando un modelo del sistema llamado Modelo de Programación Lineal.

3- El Modelo de Programación Lineal es un modelo matemático con variables de decisión, coeficientes y/o parámetros, restricciones y una Función Objetivo.

4- Es determinístico porque todos los datos relevantes utilizados son conocidos. Es lineal porque las restricciones y el objetivo son funciones lineales. La contribución de cada variable al valor total del objetivo y al lado derecho de cada restricción es proporcional al valor de la variable. Es aditivo porque los términos de sus restricciones y objetivo pueden sumarse (o restarse). La contribución de cada variable es independiente del valor de las otras variables. Es divisible porque las variables de decisión pueden aceptar valores fraccionales. En caso de no aceptar valores fraccionales, sería preferible usar Programación Lineal Entera.

5- La Formulación y Construcción del Modelo Lineal implica: a) Definir claramente las variables de decisión y expresarlas simbólicamente o convencionalmente. b) Definir claramente la Función Objetivo y las restricciones y expresarlas matemáticamente como funciones lineales.

6- Debe cuidarse que los elementos componentes del modelo sean expresados para el mismo período de tiempo.

7- Se debe estipular que las variables de decisión sean mayores o iguales a cero. Esto acerca el modelo a la realidad. En los programas de computadora para resolver modelos lineales, ya está incluida esta condición y no hace falta incorporarla manualmente.

Sistemas de Educaciones Lineales

8- La Función Objetivo del Modelo Lineal es la formulación matemática de una meta establecida y por lo tanto su valor final mide la efectividad lograda. Es una función lineal a ser maximizada o minimizada y tiene la siguiente forma general:

$$a) \text{ Optimizar } C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + C_4X_4 + \dots + C_nX_n$$

9- X_j , simboliza matemáticamente a las variables de decisión. Son los valores numéricos que se determinan con la solución del modelo y representan o están relacionadas con una actividad o acción a tomar. Son los únicos valores desconocidos en el modelo y pueden existir en cualquier cantidad, desde 1 hasta n variables. Es decir, j varía desde 1 hasta n.

10- C_j , matemáticamente, simboliza el coeficiente de la variable j en la Función Objetivo. Son datos relevantes, insumos incontrolables ya conocidos. En la Función Objetivo representan la cantidad con la cual contribuye cada unidad de la variable j, al valor total deseado en el objetivo.

11- Las restricciones, desde el punto de vista matemático, son funciones lineales expresadas como igualdades o desigualdades, que limitan el valor de las variables de decisión a valores permisibles. Representan recursos, condiciones o requerimientos establecidos. Las restricciones del Modelo Lineal general tienen la forma siguiente:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + a_{14} X_4 + \dots + a_{1n} X_n \leq b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + a_{24} X_4 + \dots + a_{2n} X_n \leq b_2$$

$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 + a_{34} X_4 + \dots + a_{3n} X_n \leq b_3$$

.....

.....

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + a_{m3} X_3 + a_{m4} X_4 + \dots + a_{mn} X_n \leq b_m$$

Sistemas de Educaciones Lineales

12- a_{ij} , matemáticamente simboliza el coeficiente, en la restricción i , de las variables j .

El subíndice i indica el recurso, requerimiento o condición cuya limitación se está expresando; j indica la variable correspondiente.

Cuando la limitación es de un recurso i , estos coeficientes representan la cantidad del recurso total limitado i , que es utilizada en cada unidad de la variable j . Cuando la limitación es de un requerimiento o condición i , representan la cantidad del requerimiento o condición i limitada, que aporta cada unidad de la variable j , al requerimiento o condición total establecida. Son, por ello, valores unitarios, al igual que los coeficientes de las variables en la Función Objetivo.

13- b_i , matemáticamente constituye el lado derecho de la restricción i . Representa la cantidad total disponible del recurso limitado i , o la cantidad total de un requerimiento o condición i establecida.

Puede existir cualquier cantidad de restricciones por lo tanto i puede variar desde 1 hasta m .

14- $X_j \geq 0$ es una restricción de no negatividad de las j variables, la cual se le considera siempre presente como una condición natural en el Modelo Lineal General.

Formulación y Construcción de Modelos Lineales. Teoría y Práctica.

1. El estudiante debe participar practicando el traslado de problemas que se presentan en sistemas específicos y que ya han sido definidos, a representaciones simplificadas. Por la práctica se obtiene la experiencia. Por lo tanto, debe formular y construir modelos.

2. La Formulación implica describir conceptualmente los elementos componentes del modelo en una situación específica.

3. La Construcción implica expresar en términos matemáticos los elementos definidos en el modelo.

Sistemas de Educaciones Lineales

4. Considerando los adelantos realizados para la solución de modelos lineales, la habilidad para formular y construir modelos es cada vez más importante.

En cada uno de los enunciados del problema dado a continuación, debe trasladar la información del sistema a un modelo que lo represente; es decir, Formule y Construya el Modelo Lineal respectivo.

EJEMPLO:

Una empresa fabrica los productos A, B y C y puede vender todo lo que produzca a los siguientes precios: A, Pesos 700, cada unidad; B, Pesos 3,500; C, Pesos 7,000. Producir cada unidad de A necesita 1 hora de trabajo, 2 horas de acabado y 3 unidades de materia prima. Producir una unidad de B necesita 2 horas de trabajo, 3 horas de acabado y 2.5 unidades de materia prima.

Producir una unidad de C necesita 3 horas de trabajo, 1 hora de acabado y 4 unidades de materia prima. Para este período de planificación están disponibles 100 horas de trabajo, 200 horas de acabado y 600 unidades de materia prima.

Para formular y construir el modelo, se tiene lo siguiente:

a) Debe definirse claramente a las variables de decisión y expresarlas simbólicamente. En la computadora y dependiendo del programa que utilice, dispondrá de un mayor espacio diseñado para escritura que puede utilizar para nombrarlas convencionalmente.

X1: unidades a producir de producto A

X2: unidades a producir de producto B Estos son insumos controlables

X3: unidades a producir de producto C

Sistemas de Educaciones Lineales

b) Debe definirse claramente el objetivo y expresarse como función lineal.

Objetivo: Maximizar ingresos de venta

$$\text{Max} = 700 \cdot X_1 + 3.500 \cdot X_2 + 7.000 \cdot X_3$$

Escribir el objetivo de esta forma es expresar en unidades físicas uno de sus términos. Este término presenta la información específica de lo que contiene y permite confirmar la esencia física de lo que se está sumando y también que ello es consecuente con lo que se está obteniendo en el total de la ecuación; en este caso, ingreso en Pesos.

c) Deben definirse las restricciones y expresarlas como funciones lineales.

Restricción 1: disponibilidad limitada de horas de trabajo.

$$1 \text{ hora de trabajo } X_1 + 2 X_2 + 3 X_3 \leq 100 \text{ horas de trabajo.}$$

Restricción 2: horas de acabado disponibles en este período:

$$2 X_1 + 3 X_2 + X_3 \leq 200 \text{ horas de acabado.}$$

Restricción 3: disponibilidad limitada de unidades de materia prima:

$$3 X_1 + 2.5 X_2 + 4 X_3 \leq 600 \text{ Unidades de materia prima.}$$

De esta forma las restricciones están expresadas en unidades físicas. Se destaca en cada una de ellas alguno de sus términos, con indicación de lo que representa. Esto confirma que lo que se está sumando es consecuente con lo que se está obteniendo del lado derecho de la ecuación.

Sistemas de Educaciones Lineales

Finalmente, incorporando la restricción de no-negatividad de las variables de decisión, se resume así el modelo:

$$\text{Max } 700 X_1 + 3.500 X_2 + 7.000 X_3$$

Sujeto a:

$$1X_1 + 2 X_2 + 3 X_3 \leq 100$$

$$2X_1 + 3 X_2 + 1 X_3 \leq 200$$

$$3X_1 + 2.5 X_2 + 4 X_3 \leq 600$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0 \text{ (No podemos producir unidades negativas)}$$

(Recuperado de: Manual de Investigación de Operaciones, Universidad de Carabobo. Profra. Zoraida Omaña.)