

Funciones Continuas

Veamos la definición de continuidad

Definición: Una función f es continua en un número a se satisfacen las tres condiciones siguientes:

- 1) f está definida en un intervalo abierto que contiene a a
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Veamos un ejemplo emanado de la definición para determinar si una función es continua o

no, sea $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4}, & \text{si } x \neq 2 \\ 4, & \text{si } x = 2 \end{cases}$

Verifiquemos cada condición:

- 1) f está definida en a

$$f(2) = 4$$

- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto el límite sí existe.

- 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{4} \neq f(2) = 4$$

Enseguida se concluye que la función no es continua, dado que no está cumpliendo la tercera condición de la definición.

Funciones Continuas

Definición: Sea f una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. La función f es continua en $[a, b]$ si lo es en (a, b) y además

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

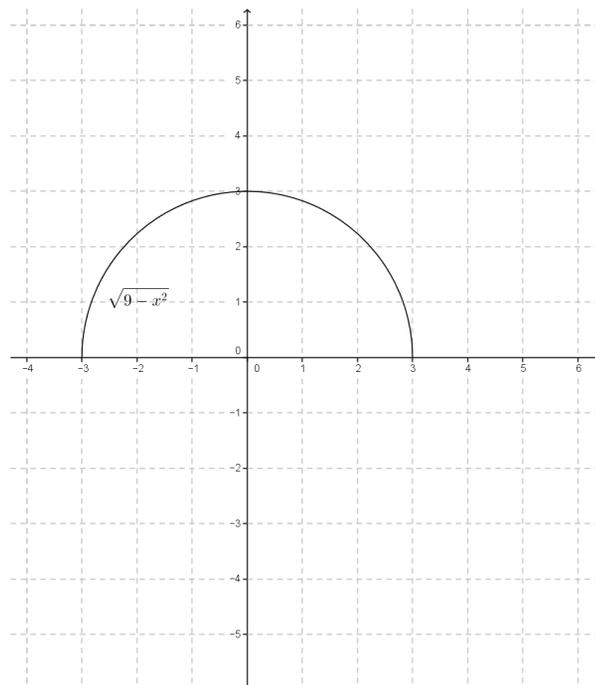
Y

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

Esto es, si una función f tiene un límite por la derecha o por la izquierda, se dice entonces que f es continua en a por la derecha o que f es continua en b por la izquierda, respectivamente.

Veamos la definición de continuidad con un ejemplo, considera la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ analiza si f es continua en el intervalo cerrado $[-3, 3]$.

Observemos primero su gráfica, si bien es cierto a simple vista la gráfica parece continua, sin embargo hay que verificar la definición.



Funciones Continuas

Verifiquemos que:

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9} = 0 = f(-3)$$

f es continua por la derecha en -3 .

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9} = 0 = f(3)$$

f es continua por la izquierda en 3 .

Por lo tanto f es continua en el intervalo $[-3,3]$.

Referencia:

Rivera Rosales, Elsa Edith, 24 de marzo de 2014, Funciones continuas, Universidad Autónoma de Coahuila, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.