Leyes de crecimiento y decrecimiento.

Una cantidad física varía en el tiempo y su magnitud al tiempo t está dada por $q(t)$, donde q es una función derivable $q(t) > 0$ para todo t. La derivada $q'(t)$ es la tasa de cambio de $q(t)$ con respecto al tiempo. En muchas aplicaciones, esta rapidez de variación es directamente proporcional a la magnitud de la cantidad de tiempo t. Esta relación puede expresarse por medio de la ecuación diferencial $q'(t) = cq(t)$ donde c es una constante. El número de bacterias se comporta de esta manera en algunos cultivos. Si el número de bacterias $q(t)$ es pequeño, entonces su tasa de crecimiento $q'(t)$ es pequeña; sin embargo, a medida que el número de bacterias aumenta, también la *tasa de crecimiento* se eleva. El decrecimiento de una sustancia radiactiva obedece una ley similar, pues a medida de que la cantidad de materia disminuye, la *tasa de decrecimiento* (y por tanto la actividad o radiación) también disminuye.

A continuación se propone la fórmula general que establece que si la tasa o razón de cambio de $y = q(t)$ con respecto a t es directamente proporcional a y, entonces y se puede expresar mediante una función exponencial. Si al aumentar t también aumenta y, entonces la fórmula $y = y_0 e^{ct}$ es una ley de crecimiento; y si y disminuye, entonces la fórmula es una ley de decrecimiento.

Fórmula 4. Sea y una función derivable de t tal que $y > 0$ para todo t y sea y_0 su valor en $t = 0$. Si $\frac{dy}{dt} = cy$ para una constante c, entonces $y = y_0 e^{ct}$.

A continuación veamos un ejemplo para comprender mejor las leyes de decrecimiento o crecimiento.

El número de bacterias en el cultivo aumenta de 600 a 1800 en dos horas. Encuentra una fórmula para el número de bacterias en el tiempo t, suponiendo que en cada momento la tasa de crecimiento es directamente proporcional al número de bacterias. ¿Cuál será el número de bacterias al cabo de cuatro horas?

Primero denotemos a $y = q(t)$ que es el número de bacterias a las t horas, entonces $y_0 = q(0) = 600$ y $q(2) = 1800$. Y por la fórmula 4 se sabe que $\frac{dy}{dt} = cy$ y $y = y_0 e^{ct}$.

Entonces $y = y_0 e^{ct} = 600e^{ct}$. Como $y = 1800$ cuando el tiempo $t = 2$,

$$1800 = 600e^{2c}$$

Despejando $e^{2c} = \frac{1800}{600} = 3$ y aplicando logaritmo a ambos lados de la ecuación se tiene:

$$2c = \ln 3$$

O bien, despejando c:

$$c = \frac{1}{2}\ln 3$$

Entonces la fórmula para y es:

$$y = 600e^{[1/2 \ln 3]t}$$

Usando el hecho de que las operaciones exponenciales y logarítmicas son inversas una de la otra, se sabe que $e^{\ln 3} = 3$ y esta ley de crecimiento se puede expresar en términos de una función exponencial base 3, como a continuación se escribe:

$$y = 600(e^{\ln 3})^{t/2} = 600(3)^{t/2}$$

Y en particular, al cabo de las cuatro horas el número de bacterias será de:

$$600(3)^{4/2} = 600(9) = 5400$$

Por lo tanto se concluye que transcurridas las cuatro horas el número de bacterias habrá crecido a 5400.

Referencias:

Rivera Rosales, Elsa Edith, 05 de mayo de 2014, Aplicaciones, Universidad Autónoma de Coahuila, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

Información extraída a partir de Swokowski, E. (1989). Cálculo con geometría analítica. Estados Unidos de América: Grupo Editorial Iberoamérica