Definición e Interpretación Geométrica

La interpretación geométrica de la derivada se presenta en las siguientes figuras:

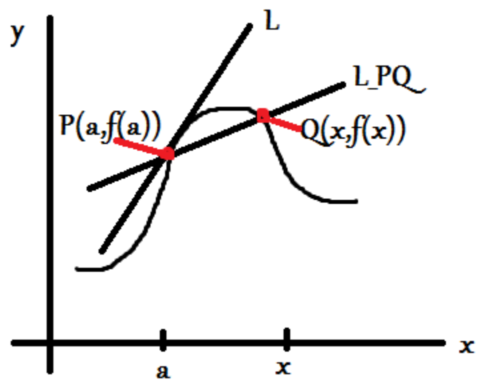

Figura 1

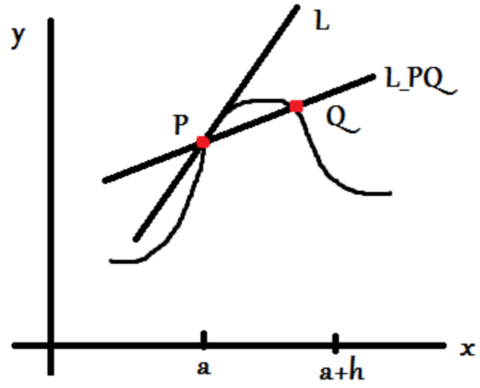

Figura 2

En la figura 1 aparece la gráfica de una función cualquiera f y una recta secante L_QP que pasa por $P(a, f(a))$ y $Q(x, f(x))$. Asimismo, la recta L representa una posible recta tangente en un punto P.

Recuerda que una recta secante es aquella que corta a una curva en dos puntos, y una recta tangente es aquella que tiene solamente un punto de contacto con la curva.

En la figura 2 se muestra que si se introduce una nueva variable h tal que $x = a + h$ (es decir, $h = x - a$), se obtiene la siguiente fórmula para m (la pendiente):

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

El límite anterior es uno de los conceptos esenciales del cálculo y recibe el nombre de *derivada de la función* f en a.

Definición e Interpretación Geométrica

Entonces la definición formal de la derivada hace uso de límites, es por esto que se analizaron en la unidad 1.

Definición: Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a a. La derivada de f en a, denotada por $f'(a)$ está dada por

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si el límite existe.

Dos aplicaciones importantes de la derivada son la recta tangente a una curva y la velocidad.

Recta tangente: La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es $f'(a)$.

Velocidad: Si un punto P se mueve a lo largo de una recta coordenada de manera que al tiempo t su coordenada es $s(t)$, entonces su velocidad al tiempo a es $s'(a)$.

Definición de la derivada como una función: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Definición e Interpretación Geométrica

Analicemos ahora un ejemplo para entender el uso del límite en la derivada, sea $f(x) = 5x^2 + 3x$.

Con la definición formal de la derivada se tiene que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[5(x+h)^2 + 3(x+h)] - (5x^2 + 3x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5(x^2 + 2xh + h^2) + 3x + 3h - 5x^2 - 3x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 + 3x + 3h - 5x^2 - 3x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{10xh + 5h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(10x + 5h + 3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 10x + 5h + 3$$

$$f'(x) = 10x + 3$$

Referencia:

Rivera Rosales, Elsa Edith, 07 de abril de 2014, Definición e interpretación geométrica, Universidad Autónoma de Coahuila, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.