Área Bajo la Curva

El área bajo la curva es equivalente a calcular la integral definida, ya que se usan sumas de muchos números, para expresar de una forma compacta estas sumatorias es necesario utilizar la **notación de sumatoria**.

Analicemos el caso sencillo de una sumatoria de $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

La letra sigma mayúscula Σ denota sumatoria y x_i representa el valor i-ésimo, así como la letra i representa el índice de la sumatoria y toma valores sucesivos.

Veamos un ejemplo de cómo se calcula una sumatoria, $\sum_{i=1}^{4} i^2(i-2)$ en este caso el valor de i toma los valores: 1, 2, 3, 4.

$$\sum_{i=1}^{4} i^2(i-2) = 1^2(1-2) + 2^2(2-2) + 3^2(3-2) + 4^2(4-2) = 1(-1) + 4(0) + 9(1) + 16(2)$$

$$= -1 + 9 + 32 = 40$$

En general se plantea el resultado siguiente: $\sum_{i=1}^{n} c = nc$

Cabe mencionar que el dominio a partir del cual comienza a correr el índice de la sumatoria no tiene que ser necesariamente en 1, por ejemplo, se tiene el siguiente caso:

$$\sum_{i=3}^{5} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} = \frac{7}{32}$$

Algunas propiedades básicas de las sumatorias son:

Sea n un entero positivo y sean $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ y $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ dos conjuntos de números reales. Entonces se tiene que:

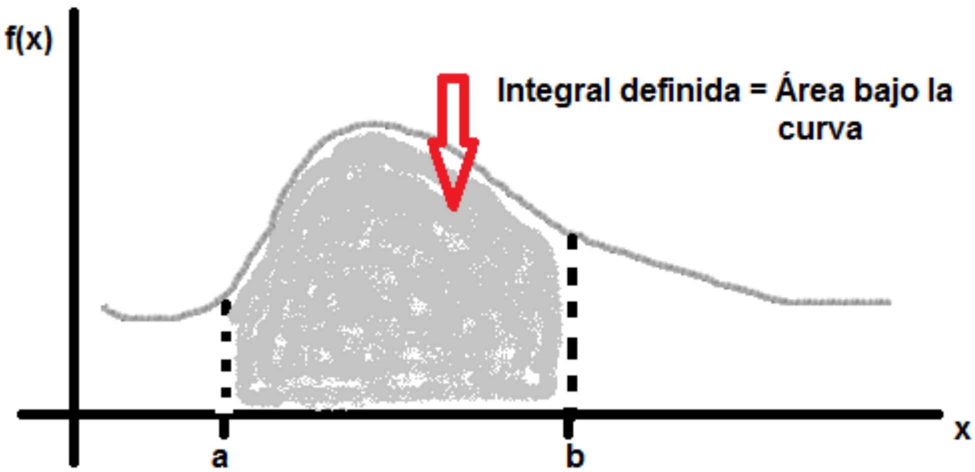
1) $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

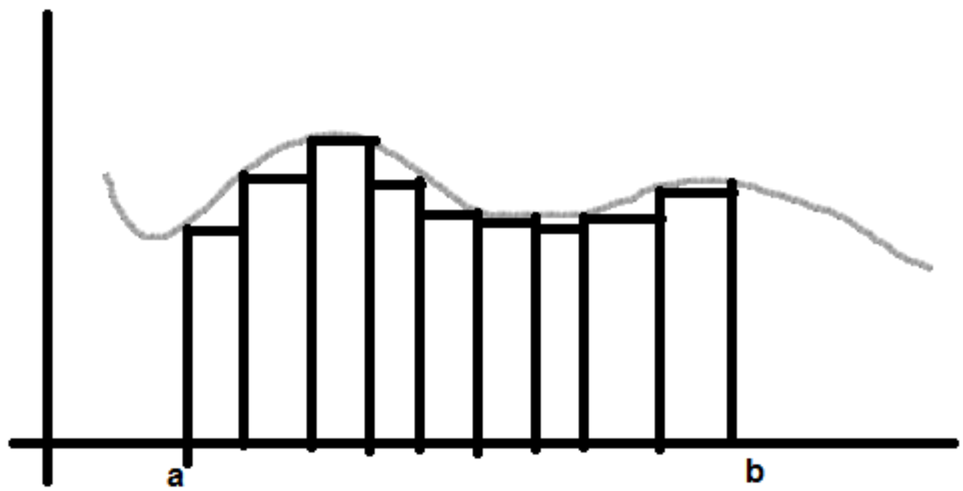
2) $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c(\sum_{i=1}^{n} a_i)$ para cualquier número c

3) $\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

Área Bajo la Curva

La definición de la integral definida está muy relacionada con las áreas de ciertas regiones en un plano coordenado, ya que sus áreas están delimitadas por rectas, traducido esto en las integrales sería que están delimitado por sus límites de integración.





Área Bajo la Curva

Definición: Sea f una función continua y no negativa en $[a,b]$. Sean A un número real y $f(u_k)$ el valor mínimo de f en $[x_{k-1},x_k]$. Entonces

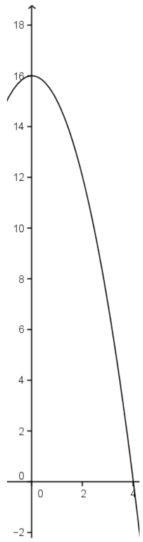
$$A = \lim_{\Delta x} \sum_{k=1}^{n} f(u_k)\Delta x$$

Significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < \Delta x < \delta$, entonces

$$A - \sum_{k=1}^{n} f(u_k)\Delta x < \varepsilon$$

Para comprender mejor la definición anterior, analicemos un ejemplo en el cálculo del área bajo una curva.

Ejemplo 1: Sea $f(x) = 16 - x^2$. Calcular el área de la región bajo la gráfica de f entre 0 y 3.



Supongamos que se divide el intervalo [0,3] en n subintervalos iguales, por lo que la longitud de cada subintervalo $\Delta x = \frac{3}{n}$. Consideremos como extremos a los valores $a = 0$ y $b = 3$.

Sea $x_0 = 0$, $x_1 = \Delta x$, $x_2 = 2\Delta x$, ..., $x_k = k\Delta x$, $x_n = n\Delta x = 3$ ya que $\Delta x = \frac{3}{n}$

$$x_k = k\Delta x = k\frac{3}{n} = \frac{3k}{n}$$

Se observa en la gráfica que la función f es decreciente en el intervalo $[0,3]$, el número u_k *en* $[x_{k-1}, x_k]$ en el que f alcanza su mínimo es siempre el extremo derecho x_k del subintervalo, es decir

$$u_k = x_k = \frac{3k}{n}$$

Por lo tanto, si sustituimos $f(u_k) = f\left(\frac{3k}{n}\right) = 16 - \left(\frac{3n}{k}\right)^2 = 16 - \frac{9k^2}{n^2}$

Y considerado la suma en la definición anterior $\sum_{k=1}^{n} f(u_k)\Delta x = \sum_{k=1}^{n}\left(16 - \frac{9k^2}{n^2}\right)\left(\frac{3}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{48}{n} - \frac{27k^2}{n^3}\right)$ y por las definiciones que se vieron de sumatorias la última sumatoria se puede escribir como:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{48}{n} - \frac{27k^2}{n^3}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{48}{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{27k^2}{n^3} = \left(\frac{48}{n}\right)n - \frac{27}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(u_k)\Delta x = 48 - \frac{27}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = 48 - \frac{9}{2n^3}[2n^3 + 3n^2 + n]$$

Entonces, para calcular el área de la región se hace tender Δx a 0. Así:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x \to 0}\sum_{k=1}^{n} f(u_k)\Delta x \\
&\quad = \lim_{n\to\infty}\left(48 - \frac{9}{2n^3}[2n^3 + 3n^2 + n]\right) \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} 48 \\
&\quad - \frac{9}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3}\right] \\
&\quad = 48 - \frac{9}{2}\lim_{n\to\infty}\left[2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right] = 48 - \frac{9}{2}[2 + 0 + 0] = 48 - 9 = 39
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área de la región mide 39 unidades cuadradas, y este resultado se puede verificar obteniendo el área de la función con los límites de integración dados:

$$\int_0^3 (16 - x^2)dx = \left(16x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = 16(3) - \frac{27}{3} = 48 - 9 = 39$$

Referencia:

Rivera Rosales, Elsa Edith, 05 de septiembre de 2014, Área bajo la curva, Universidad Autónoma de Coahuila, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.